Zobecnění variet

Fibrované prostory

Def: fibrovaný prostor (bundle)

$\mathbb{E}M$ je fibrovaný prostor se stand. fibrem $\mathbb{E}$ $\equiv$

- $\mathbb{E}M$ je dif. varieta — totální prostor, bundle
- M je dif. varieta — podkladový [base] prostor
- $\mathbb{E}$ prostor s nějakou str — standardní vlákno [fiber]
- $\pi : \mathbb{E}M \to M$ projekce dávající fibraci
- $\mathbb{E}_x M = \pi^{-1} x$ vlákno [fiber] nad $x \in M$
- $\mathbb{E}_x M \cong \mathbb{E}$ isomorfismus vlákna se stand. fibrem

  isomorfismus respektující strukturu $\mathbb{E}$

  přesněji: lokální isom. $\mathbb{E}U \cong U \times \mathbb{E}$

Def řezy fibrovaného prostoru

$\phi : M \to \mathbb{E}M \qquad x \to \phi(x) \in \mathbb{E}_x M$

tj. $\pi \phi = id$

tečný a kotečný bundle jsou vekt. fibr. prostory

TM je prostor řezů $\mathbb{T}M$

T^*M je prostor řezů $\mathbb{T}^*M$

tečný a kotečný prostor je svázán s M více než obecný fibrovaný prostor nad M

Zobecnění variety pro obecnou strukturu

def. variety lze zobecnit pro případ, kdy souřadnice nabývají hodnot v obecném prostoru resp. připouštějí se pouze specifické transf. v prostoru souřadnic

Def: pseudogrupa Γ transformací na souřadnicovém prostoru S ≡

S topol. prostor. (prostor hodnot souřadnic – např. $\mathbb{R}^n$)

Γ množina transf $\underset{(\text{otevř.} \to \text{otevř.})}{S \to S}$ (přípustné transf souř – např C^r)

- $\alpha \in \Gamma$ je spojité
- $\alpha \in \Gamma \Rightarrow \forall\, U \subset S$ otevř. $\alpha|_U \in \Gamma$
- α homeomorf. na $U = \bigcup_\mu U_\mu$ $U_\mu \subset S$ otevřené

  $\alpha|_{U_\mu} \in \Gamma \Rightarrow \alpha \in \Gamma$
- $U \subset S$ otevř. $\Rightarrow id|_U \in \Gamma$
- $\alpha \in \Gamma \Rightarrow \alpha^{-1} \in \Gamma$
- $\alpha, \beta \in \Gamma \Rightarrow \alpha \circ \beta \in \Gamma$ na příslušné oblasti

Def. varieta M se strukturou Γ ≡

stejná def jako pro dif varietu jen $\mathbb{R}^n, C^r$ nahrazeno strukturou S, Γ

příklady:

orientovaná dif. varieta

- připouští se pouze transf. souř. s $\det \frac{\partial y^i}{\partial x^j} > 0$

komplexní variety

- $S = \mathbb{C}^n$, holomorfní transf.

Varieta v řeči prostoru funkcí

dif. varietu M lze charakterizovat prostorem hl. fcí
několik příbuzných přístupů
- strukturní sheaf dif. var.
- locally ringed space
- C^* algebry s bližšími hladkosti

zadání "prostoru" fcí umožní zrekonstruovat
top. či dif. strukturu na varietě či dokonce
varietu samotnou

změnou funkcionálních vlastností pr. fcí
lze zavést abstraktní pojem variety jako
podkladu pro příslušný pr. fcí
umožňuje např. zavést
supervariety (supergeometrie)
nekomutativní geometrii

Svazky a okruhované prostory

opakování z algebry:

- abelovská grupa
  operace + , asociat., komutat., inverze, prvek 0
- komutativní těleso $\mathbb{K}$ (pole) [field]
  operace + abelovská gr.
  $\cdot$ asociat., komutat., distribut., prvek 1
  inverze mimo 0

  typicky $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$
- vekt. prostor V nad $\mathbb{K}$
  operace + abel. gr.
  násobení skalárem z $\mathbb{K}$ - linearita (tj. asoc. a distrib.)
- algebra A nad $\mathbb{K}$
  vekt. pr. nad $\mathbb{K}$ s operací +
  násobení v A konzist. s operacemi vekt. pr. (bi-linearita)
  - asociativní algebry
  - komutativní alg.
  - Lieovy alg.
- okruh R
  obdobně tělesu, ale není zaručena existence inverze
  Př: funkce na varietě
- modul V nad R (R-modul V)
  obdobně vekt. pr., ale nad okruhem
  Př: vekt. a tenz. pole na varietě, řezy vekt. bundlů
- algebra A nad modulem R
  obdobně algebře, je nad okruhem
  Př: algebra fcí na varietě (okruh R je vždy alg nad R)
  operátory TM na varietě ...

modul V nad okruhem R (R-moduly)

$a_1, \dots, a_z \in V$ jsou lin. závislé pokud

$r_1 a_1 + \dots + r a_z = 0$ pro $r_j \in R$

nezaručuje možnost vyjádření a_i pomocí ostatních!

e_i tvoří bázi modulu V

$\forall a \in V \quad \exists a^i \in R \quad a = \sum_i a^i e_i$

volný modul - existuje báze

konečně generovaný modul - existuje konečná báze

duální modul V^* - prostor R-lineárních funkcí $V \to R$

reflexivní modul - $V^{**} \cong V$

- platí pro konečně generované moduly
- platí pro řezy ~~vekt.~~ bundlů s kon. dim. fibrem

Def: předsvazek $\mathcal{S}$ nad M (též $\mathcal{S}_M$ či $\mathcal{S}M$) [presheaf]

- topologický prostor M (většinou též varieta)
- přiřazení $\mathcal{S} : U \subset M \to \mathcal{S}U$ (U otevřené)

  kde $\mathcal{S}U$ je prostor $\mathcal{S}$-řezů nad U

  typicky abel. gr., okruh, modul, algebra
- operace restrikce r^U_V

  $V \subset U \quad r^U_V : \mathcal{S}U \to \mathcal{S}V \quad \phi \to \phi|_V$ splňující

  $r^V_W \circ r^U_V = r^U_W$ pro $W \subset V \subset U \subset M$ otevř.

  $r^V_V = id_V$ pro $V \subset M$ otevř.

Def: svazek $\mathcal{S}$ nad M (též $\mathcal{S}_M$ či $\mathcal{S}M$) [sheaf]

svazek $\mathcal{S}_M$ je předsvazek $\mathcal{S}_M$ splňující

1) $\phi_1, \phi_2 \in \mathcal{S}U \quad \forall \alpha \quad \phi_1|_{U_\alpha} = \phi_2|_{U_\alpha} \Rightarrow \phi_1 = \phi_2$

2) pro kolekci $\phi_\alpha \in \mathcal{S}U_\alpha$ splňující

$\forall \alpha, \beta \quad \phi_\alpha|_{U_\alpha \cap U_\beta} = \phi_\beta|_{U_\alpha \cap U_\beta}$

existuje $\phi \in \mathcal{S}U$ tak, že $\phi|_{U_\alpha} = \phi_\alpha$

kde $U = \bigcup_\alpha U_\alpha \quad U_\alpha$ otevřené v M

Pozn.: pokud máme nějakou operaci mezi dvěma (před)svazky, předpokládáme konzistenci operace s restrikcí

Př:

- svazek $\mathcal{F}_M$ okruhů C^∞ fcí na M a jejích otevř. mn.

  máme řezy nad každou U a i glob. rozšíření
- svazek modulů $\mathcal{T}_M$ nad svazkem $\mathcal{F}_M$

  tj $\mathcal{T}U$ je $\mathcal{F}U$-modul

  nemusí existovat gl. nenul. řezy (nyparalelizov. TM)

Př: předsvazek $\mathcal{K}_M$ konst. fcí na M

$\mathcal{K}U$ konstantní fce na U

není svazek!

$M = M_1 \cup M_2$ M_i komponenty M

řezy na M_1, M_2 nezaručují existenci řezu na M

$k_1 \in \mathcal{K}M_1$ $k_2 \in \mathcal{K}M_2$ konzist. na $M_1 \cap M_2 = \emptyset$

pro $k_1|_{x_1} \neq k_2|_{x_2}$ neexistuje $k \in \mathcal{K}M$ tak, že

$k|_{M_1} = k_1$ a $k|_{M_2} = k_2$

lze zavést svazek lokálně konst. fcí

Př: předsvazek $\mathcal{B}_M$ omezených fcí na M

$\mathcal{B}U$ soubor omezených hlad. fcí na U

není svazek!

omezenost na okolích U_α nezaručuje omezenost na jejich sjednocení – pro nekonečné okolí

Př: svazek $\mathcal{H}_M$ holomorfních fcí na komplexní var. M

$\mathcal{H}U$ holomorfní fce na $U \subset M$

nemusí existovat netriv. gl. řezy rozšiřující lokální řez, tj. pro $\phi_U \in \mathcal{H}U$ nemusí existovat $\phi \in M$ tak, že $\phi|_U = \phi_U$

např. $\sqrt{z}$, $\log z$, … – více větví

Př: svazek $\mathcal{F}_M$ hladkých fcí na M

$\mathcal{F}U$ hladké fce na $U \subset M$

pro každou $f \in \mathcal{F}U$ existuje globální rozšíření

Př: svazek $\mathcal{T}_M$ hladkých vekt. polí na M

$\mathcal{T}U$ hladká pole na $U \subset M$

pro U homeomorfní $\mathbb{R}^d$ je $\mathcal{T}U$ konečně gen. $\mathcal{F}U$-modul

ale $\mathcal{T}M$ nemusí být volný modul = neparalelizovatelnost

$\mathcal{T}M$ je reflexivní (stačí lokální konečné generování)

Def: germ (zárodek) a stvol [stalk]
mějme (před)svazek $\mathcal{F}_M$ a bod $x \in M$
$\underset{x}{\sim}$ relace ekvivalence na řezech na oblastech obsah. x

$$\phi_1 \underset{x}{\sim} \phi_2 \equiv \exists U \subset M \; x \in U \; U \subset U_i \quad \phi_1|_U = \phi_2|_U$$

$\in \mathcal{F}U_1 \quad \in \mathcal{F}U_2$ existuje okolí U na kterém ϕ_1, ϕ_2 shodné

třída ekvivalence $\underset{x}{\sim}$ se nazývá germ v bodě x
soubor germů v bodě x tvoří stvol [stalk] $\mathcal{F}_x M$

Def: okruhované prostory [ringed space]
$(M, \mathcal{R}_M)$ či jen $\mathcal{R}M$ je okruhovaný pr $\equiv$
M topologický prostor
$\mathcal{R}_M$ svazek okruhů

lokální okruhovaný prostor $\mathcal{R}M$ $\equiv$
$\mathcal{R}_x M$ je lokální = má jednoznačný maximální ideál

umožňuje definovat pojem variety skrze zadání hladkých fcí
M je dif var. (def. pomocí okruh. pr.) $\equiv$
$(M, \mathcal{F}_M)$ je lokální okruh. prostor
lokálně isomorfní s $(\mathbb{R}^n, C^\infty_{\mathbb{R}^n})$
M (s indukovanou top.) je Hausdorffův se spoč. bází top

umožňuje zobecnit pojem variety
zadá se obecnější prostor fcí skrze zadání jiného lok. okruh. prostoru
např. lokálně isomorfní s grassmannovským $(\mathbb{R}^{m,k}, C^\infty_{\mathbb{R}^{m,k}})$